

Benchmarks of Nonclassicality for Qubit Arrays: Supplementary Information

Mordecai Waegell¹ and Justin Dressel^{1,2}

¹*Institute for Quantum Studies, Chapman University, Orange, CA, USA*

²*Schmid College of Science and Technology, Chapman University, Orange, CA, USA**

SUPPLEMENTARY DISCUSSION

Minimal Benchmark IDs: We have discovered benchmark IDs which appear to be minimal for all $3 \leq N \leq 33$, and an example for each value of N is shown in Supplementary Figures 1, 2, 3, 4, and 5. At the time of writing, these IDs have the fewest measurement settings for $N \leq 33$, while the maximal class in Fig. 2 of the main text provides a benchmark for all $N \geq 10$. Numerical searches for minimal IDs with higher N are underway, and the largest value of N we can obtain for a minimal ID will be limited by computational resources and time. The largest resource cost comes from checking each ID for maximal entanglement, which generally requires examination of every bipartition by brute force.

The maximal N for known benchmark IDs of a given M are,

$$\begin{array}{c|cccccc} N & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 \\ \hline M & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}.$$

This suggests that the number of qubits N in a benchmark ID with M observables is bounded by,

$$M - 1 \leq N \leq (M - 2)(M - 1)/2, \quad (1)$$

and we conjecture that this will hold for all M . If we can derive a proof that this conjecture is true, this may help to identify a pattern to generate IDs with $N = (M - 2)(M - 1)/2$ for all M .

SUPPLEMENTARY NOTES

Maximal Benchmark IDs for All N : The benchmark IDs for all N in the main text belong to the stabilizer group of the N -qubit linear cluster state. That is, these maximal IDs stabilize a particular maximally entangled eigenstate, which is rank 1 as opposed to the code spaces of maximum rank stabilized by the minimal IDs. Unlike the case with minimal IDs, we exploit an emergent pattern in the maximal IDs that allow them to be extended to all N in a straightforward way that is provably maximally entangled.

To prove that these IDs stabilize the linear cluster state, we select the specific separable N -qubit IDs shown in Supplementary Figure 6 from the stabilizer group of $(H|0)^{\otimes N}$. Acting a controlled- Z gate on every nearest-neighbor pair of qubits in the array transforms this separable ID into the corresponding benchmark ID from Fig. 2 of the main text, Q.E.D.

* Corresponding Author: dressel@chapman.edu; Keck Center for Science and Engineering, Chapman University, One University Drive, Orange, CA 92866; Phone: (714) 516-5949

SUPPLEMENTARY FIGURES

| $N = 3$ | | $N = 33, M = 10$ | |
|-------------|-------|------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| $M = 4$ | | λ_i | O_i |
| λ_i | O_i | -1 | I I I Z Y Y I X Z I I I I I I Z Y X Y Z Z Y Y Z I I I I I I I I |
| -1 | Y X Y | 1 | I I I I I I I I Z X I Y Y I X I Y Y Z I I I I I I I I Z X Z I I I |
| 1 | Y Y Z | 1 | I I I I I I Z Y Y I X Z I I Z X Z Z X I X Z I I I I I I I I I I |
| 1 | Z X Z | -1 | Z X Z I I I I I I I Z Y X Y Z Z X I Y Y I X Z I I I Z X Z I I I I I |
| 1 | Z Y Y | 1 | Z Y Y I X Z I I I I I I Z X I X Z I Z X I Y X X Y Z I I I I I I I I |
| | | 1 | I I I I I I I I I I Z X I X Z I I I I I Z X I Y X X Y Z I I Z Y Y Z |
| | | 1 | I I I I I I I Z Y Y I Y Y Z I I I I I I I I I Z X I X I X I Y Y I X Z |
| | | 1 | I I I Z Y Y I Y X Y Z I I I I I I I I I I I I I I Z Y Y I Y Y I Y X Y |
| | | 1 | Y Y I Y X Y Z I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I Z Y X Y Z I I |
| | | -1 | Y X Y Z I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I Z Y Y |
| | | | $N = 32, M = 10$ |
| | | λ_i | O_i |
| | | -1 | I I Z Y Y I X Z I I I I I I I I Z Y X Y Z Z Y Y Z I I I I I I I I I I |
| | | 1 | I I I I I I I I Z X I Y Y I X I Y Y Z I I I I I I I I I I Z X Z I I I |
| | | 1 | I I I I I I Z Y Y I X Z I I Z X Z Z X I X Z I I I I I I I I I I I I |
| | | -1 | X Z I I I I I I I I Z Y X Y Z Z X I Y Y I X Z I I I Z X Z I I I I I I |
| | | 1 | Y Y I X Z I I I I I I I Z X I X Z I Z X I Y X X Y Z I I I I I I I I |
| | | 1 | I I I I I I I I I I Z X I X Z I I I I I I I I Z X I Y X X Y Z I I Z X Z I |
| | | 1 | I I I I I I Z Y Y I Y Y Z I I I I I I I I I I Z X I X I X I Y Y Z Z X |
| | | -1 | I Z Y Y I Y X Y Z I I I I I I I I I I I I I I I I Z Y Y I Y Y I X I X |
| | | 1 | X I Y X Y Z I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I Z Y X Y I X Z |
| | | 1 | Y Y Z I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I Z X Z |
| | | | $N = 31, M = 10$ |
| | | λ_i | O_i |
| | | -1 | I Z Y Y I X Z I I I I I I I I Z Y X Y Z Z Y Y Z I I I I I I I I I I |
| | | 1 | I I I I I I I I Z X I Y Y I X I Y Y Z I I I I I I I I I I Z X Z I I I |
| | | 1 | I I I I Z Y Y I X Z I I Z X Z Z X I X Z I I I I I I I I I I I I I I |
| | | -1 | I I I I I I I I Z Y X Y Z Z X I Y Y I X Z I I I Z X Z I I I I I I |
| | | 1 | X I X Z I I I I I I I I Z X I X Z I Z X I Y X X Y Z I I I I I I I I |
| | | 1 | I I I I I I I I I I Z X I X Z I I I I I I I I Z X I Y X X Y Z I I Z X Z I |
| | | 1 | I I I I I I Z Y Y I Y Y Z I I I I I I I I I I Z X I X I X I Y Y Z Z X |
| | | -1 | Z Y Y I Y X Y Z I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I Z Y Y I Y Y I X I X |
| | | 1 | Z Y X Y Z I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I Z Y X Y I X Z |
| | | 1 | X Z I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I Z X Z |
| | | | $N = 6, M = 5$ |
| | | λ_i | O_i |
| | | -1 | I Z Y X Y Z |
| | | 1 | X I Y Y Z I |
| | | 1 | X Z Z X I X |
| | | 1 | Z X I Y Y Z |
| | | 1 | Z X Z I Z X |

Supplementary Figure 1. Known minimal benchmark IDs for qubit numbers $3 \leq N \leq 33$. We present all IDs in Supplementary Figures 1–5, in ascending order of N in the left column, and descending in the right column. Left: $N = 3, 4, 5, 6$. Right: $N = 31, 32, 33$.

| $N = 7, M = 6$ | | $N = 30, M = 10$ | |
|-----------------|---------------------|------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| λ_i | O_i | λ_i | O_i |
| 1 | I I Z Y X X Y | -1 | Z Y Y I X Z I I I I I I Z Y X Y Z Z Y Y Z I I I I I I I I |
| 1 | Z X I Y Y Z I | 1 | I I I I I Z X I Y Y I X I Y Y Z I I I I I I I Z X Z I I I |
| 1 | Z X Z Z X I X | 1 | I I Z Y Y I X Z I I Z X Z Z X I X Z I I I I I I I I I I |
| -1 | I Z X I Y X Y | -1 | I I I I I I Z Y X Y Z Z X I Y Y I X Z I I I Z X Z I I I I I |
| 1 | X I X Z I Z X | 1 | Z X Z I I I I I I Z X I X Z I Z X I Y X X Y Z I I I I I I I |
| 1 | X Z I I I I I | 1 | I I I I I I I Z X I X Z I I I I Z X I Y X X Y Z I I Z X Z I |
| | | 1 | I I I Z Y Y I Y Y Z I I I I I I I I Z X I X I X I Y Y Z Z X |
| | | -1 | Y Y I Y X Y Z I I I I I I I I I I I I I I Z Y Y I Y Y I X I X |
| | | 1 | Y X Y Z I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I Z Y X Y I X Z |
| | | 1 | I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I Z X Z |
| $N = 8, M = 6$ | | $N = 29, M = 10$ | |
| λ_i | O_i | λ_i | O_i |
| 1 | I I I Z Y X X Y | -1 | Z Y Y I X Z I I I I I I Z Y X Y Z Z Y Y Z I I I I I I I I |
| 1 | I Z X I Y Y Z I | 1 | I I I I I Z X I Y Y I X I Y Y Z I I I I I I I I Z X Z I I |
| 1 | X I X Z Z X I X | 1 | I I Z Y Y I X Z I I Z X Z Z X I X Z I I I I I I I I I I |
| -1 | X Z Z X I Y X Y | -1 | I I I I I I Z Y X Y Z Z X I Y Y I X Z I I I Z X Z I I I I |
| 1 | Z X I X Z I Z X | 1 | Z X Z I I I I I I Z X I X Z I Z X I Y X X Y Z I I I I I I |
| 1 | Z X Z I I I I I | 1 | I I I I I I I Z X I X Z I I I I Z X I Y X X Y Z I I Z X Z |
| | | 1 | I I I Z Y Y I Y Y Z I I I I I I I I I I Z X I X I X I Y Y Z I |
| | | -1 | Y Y I Y X Y Z I I I I I I I I I I I I I I I I I I I Z Y Y I Y Y I X Z |
| | | 1 | Y X Y Z I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I Z Y X Y I X |
| | | 1 | I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I Z X |
| $N = 9, M = 6$ | | $N = 28, M = 9$ | |
| λ_i | O_i | λ_i | O_i |
| -1 | I I I Z Y X Y Z I | -1 | Z Y Y I X Z I I I I I I Z Y X Y Z Z Y Y Z I I I I I I I I |
| 1 | X I X I Y Y Z I I | 1 | I I I I I I Z X I Y Y I X I Y Y Z I I I I I I I I Z X Z I |
| 1 | I Z X Z Z X I X Z | 1 | I I Z Y Y I X Z I I Z X Z Z X I X Z I I I I I I I I I I |
| 1 | X Z Z X I Y Y I X | -1 | I I I I I I Z Y X Y Z Z X I Y Y I X Z I I I Z X Z I I I I |
| 1 | Z X I X Z I Z X Z | 1 | Z X Z I I I I I I Z X I X Z I Z X I Y X X Y Z I I I I I I |
| 1 | Z X Z I I I I Z X | 1 | I I I I I I I Z X I X Z I I I I Z X I Y X X Y Z I I Z X |
| | | 1 | I I I Z Y Y I Y Y Z I I I I I I I I I I Z X I X I X I Y Y Z |
| | | -1 | Y Y I Y X Y Z I I I I I I I I I I I I I I I I I I I Z Y Y I Y Y I X |
| | | 1 | Y X Y Z I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I Z Y X Y Z |
| $N = 10, M = 6$ | | | |
| λ_i | O_i | | |
| -1 | I I I Z Y X Y Z Z X | | |
| 1 | X I X I Y Y Z I I I | | |
| 1 | I Z X Z Z X I X Z I | | |
| 1 | X Z Z X I Y Y I X Z | | |
| 1 | Z X I X Z I Z X I X | | |
| 1 | Z X Z I I I I Z X Z | | |

Supplementary Figure 2. Known minimal benchmark IDs for qubit numbers $3 \leq N \leq 33$. We present all IDs in Supplementary Figures 1–5, in ascending order of N in the left column, and descending in the right column. Left: $N = 7, 8, 9, 10$. Right: $N = 28, 29, 30$.

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $N = 11, M = 7$ | $N = 27, M = 9$ |
| λ_i O_i <hr/> -1 I I I Z Y X Y Z Z X Z 1 X I X I Y Y Z I I I I 1 I Z X Z Z X I X Z I I 1 X Z Z X I Y Y I X Z I 1 Z X I X Z I Z X I X Z 1 Z X Z I I I I Z X I X 1 I I I I I I I I Z X | λ_i O_i <hr/> -1 Z X I X Z I I I I I Z Y X Y Z Z Y Y Z I I I I I I 1 I I I I Z X I Y Y I X I Y Y Z I I I I I I I Z X Z I -1 Z Y X Y I X Z I I Z X Z Z X I X Z I I I I I I I I -1 I I I I I Z Y X Y Z Z X I Y Y I X Z I I I Z X Z I I I 1 I I I I I I I Z X I X Z I Z X I Y X X Y Z I I I I I 1 I I I I I I Z X I X Z I I I I Z X I Y X X Y Z I I Z X 1 I I Z Y Y I Y Y Z I I I I I I I I Z X I X I X I Y Y Z -1 Y X X X Y Z I I I I I I I I I I I I I I Z Y Y I Y Y I X -1 Y Y Z I I I I I I I I I I I I I I I I I I I Z Y X Y Z |
| $N = 12, M = 7$ | |
| λ_i O_i <hr/> -1 I I I I Z Y X Y Z Z X Z 1 Y Y I X I Y Y Z I I I I 1 I I Z X Z Z X I X Z I I 1 Y Y Z Z X I Y Y I X Z I 1 I Z X I X Z I Z X I X Z 1 X I X Z I I I I Z X I X 1 X Z I I I I I I I I Z X | |
| $N = 13, M = 7$ | $N = 26, M = 9$ |
| λ_i O_i <hr/> -1 I I I I Z Y X Y Z Z X Z I 1 Y Y I X I Y Y Z I I I I I 1 I I Z X Z Z X I X Z I I I 1 Y Y Z Z X I Y Y I X Z Z X 1 I Z X I X Z I Z X I X I X 1 X I X Z I I I I Z X I X Z 1 X Z I I I I I I I I Z X Z | λ_i O_i <hr/> -1 Z X I X Z I I I I I I Z Y X Y Z Z Y Y Z I I I I I I 1 I I I I Z X I Y Y I X I Y Y Z I I I I I I I I Z X Z -1 Z Y X Y I X Z I I Z X Z Z X I X Z I I I I I I I I -1 I I I I I Z Y X Y Z Z X I Y Y I X Z I I I Z X Z I I 1 I I I I I I I Z X I X Z I Z X I Y X X Y Z I I I I 1 I I I I I I Z X I X Z I I I I Z X I Y X X Y Z I I I 1 I I Z Y Y I Y Y Z I I I I I I I I Z X I X I X I Y Y -1 Y X X X Y Z I I I I I I I I I I I I I I Z Y Y I Y Y Z -1 Y Y Z I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I Z Y X Y |
| $N = 14, M = 7$ | $N = 25, M = 9$ |
| λ_i O_i <hr/> -1 I I I I I Z Y X Y Z Z Y Y Z 1 Z Y Y I X I Y Y Z I I I I I 1 I I I Z X Z Z X I X Z I I I -1 Y X Y Z Z X I Y Y I X Z I I -1 I I Z X I X Z I Z X I Y X Y 1 Z X I X Z I I I I Z X I X Z 1 Y Y Z I I I I I I I Z Y Y | λ_i O_i <hr/> -1 I I Z X Z I I I I I I Z Y X Y Z Z Y Y Z I I I I I 1 I I I I Z X I Y Y I X I Y Y Z I I I I I I I I I 1 X I Y Y I X Z I I Z X Z Z X I X Z I I I I I I I I -1 I I I I I Z Y X Y Z Z X I Y Y I X Z I I I Z X Z I 1 X Z I I I I I I Z X I X Z I Z X I Y X X Y Z I I I 1 I I I I I I Z X I X Z I I I I Z X I Y X X Y Z Z X 1 Z X I Y Y I Y Y Z I I I I I I I I I I Z X I X I X I X -1 I Z Y X Y Z I I I I I I I I I I I I I I Z Y Y I X Z 1 Z X Z I I I I I I I I I I I I I I I I I I I Z X Z |

Supplementary Figure 3. Known minimal benchmark IDs for qubit numbers $3 \leq N \leq 33$. We present all IDs in Supplementary Figures 1–5, in ascending order of N in the left column, and descending in the right column. Left: $N = 11, 12, 13, 14$. Right: $N = 25, 26, 27$.

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $N = 15, M = 7$ λ_i O_i <hr/> -1 I I I I I Z Y X Y Z Z Y Y Z I 1 Z Y Y I X I Y Y Z I I I I I I 1 I I I Z X Z Z X I X Z I I Z X -1 Y X Y Z Z X I Y Y I X Z I I I -1 I I Z X I X Z I Z X I Y X Y Z 1 Z X I X Z I I I I Z X I X I X 1 Y Y Z I I I I I I I Z Y Y Z | $N = 24, M = 9$ λ_i O_i <hr/> -1 I Z X Z I I I I I Z Y X Y Z Z Y Y Z I I I I I 1 I I I Z X I Y Y I X I Y Y Z I I I I I I I I I 1 Z Y Y I X Z I I Z X Z Z X I X Z I I I I I I I -1 I I I I Z Y X Y Z Z X I Y Y I X Z I I I Z X Z I 1 I I I I I I I Z X I X Z I Z X I Y X X Y Z I I I 1 I I I I I Z X I X Z I I I I Z X I Y X X Y Z Z X 1 X I Y Y I Y Y Z I I I I I I I I I Z X I X I X I X -1 Z Y X Y Z I I I I I I I I I I I I I Z Y Y I X Z 1 X Z I I I I I I I I I I I I I I I I I I I Z X Z |
| $N = 16, M = 8$ λ_i O_i <hr/> -1 I I I I I Z Y X Y Z Z Y Y Z I I 1 Z Y Y I X I Y Y Z I I I I I I I 1 I I I Z X Z Z X I X Z I I Z X Z -1 Y X Y Z Z X I Y Y I X Z I I I I -1 I I Z X I X Z I Z X I Y X Y Z I 1 Z X I X Z I I I I Z X I X I X Z 1 Y Y Z I I I I I I I I Z Y Y I X 1 I I I I I I I I I I I I I I I Z X | $N = 23, M = 9$ λ_i O_i <hr/> -1 Z X Z I I I I I I Z Y X Y Z Z Y Y Z I I I I I 1 I I Z X I Y Y I X I Y Y Z I I I I I I I I I 1 Y Y I X Z I I Z X Z Z X I X Z I I I I I I I -1 I I I Z Y X Y Z Z X I Y Y I X Z I I I Z X Z I 1 I I I I I I I Z X I X Z I Z X I Y X X Y Z I I I 1 I I I I Z X I X Z I I I I Z X I Y X X Y Z Z X 1 Z Y Y I Y Y Z I I I I I I I I I Z X I X I X I X -1 Y X Y Z I I I I I I I I I I I I I I I Z Y Y I X Z 1 I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I Z X Z |
| $N = 17, M = 8$ λ_i O_i <hr/> -1 I I I I I Z Y X Y Z Z Y Y Z I I I 1 Z Y Y I X I Y Y Z I I I I I I I I 1 I I I Z X Z Z X I X Z I I Z X Z I -1 Y X Y Z Z X I Y Y I X Z I I I I I -1 I I Z X I X Z I Z X I Y X Y Z Z X 1 Z X I X Z I I I I Z X I X I X I X 1 Y Y Z I I I I I I I I I Z Y Y I X Z 1 I I I I I I I I I I I I I I I I Z X Z | $N = 22, M = 9$ λ_i O_i <hr/> -1 Z X Z I I I I I I Z Y X Y Z Z Y Y Z I I I I 1 I I Z X I Y Y I X I Y Y Z I I I I I I I I 1 Y Y I X Z I I Z X Z Z X I X Z I I I I I I I -1 I I I Z Y X Y Z Z X I Y Y I X Z I I I Z X Z 1 I I I I I I I Z X I X Z I Z X I Y X X Y Z I I 1 I I I I Z X I X Z I I I I Z X I Y X X Y Z I 1 Z Y Y I Y Y Z I I I I I I I I I Z X I X I X Z -1 Y X Y Z I I I I I I I I I I I I I I I Z Y Y I X 1 I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I Z X |

Supplementary Figure 4. Known minimal benchmark IDs for qubit numbers $3 \leq N \leq 33$. We present all IDs in Supplementary Figures 1–5, in ascending order of N in the left column, and descending in the right column. Left: $N = 15, 16, 17$. Right: $N = 22, 23, 24$.

| | $N = 18, M = 8$ | | $N = 21, M = 8$ |
|-------------|---------------------------------------|-------------|-------------------------------------------|
| λ_i | O_i | λ_i | O_i |
| -1 | I I I I I I Z Y X Y Z Z Y Y Z I I I | -1 | Z X Z I I I I I Z Y X Y Z Z Y Y Z I I I |
| 1 | I I Z Y Y I X I Y Y Z I I I I I I I | 1 | I I Z X I Y Y I X I Y Y Z I I I I I I I |
| 1 | I I I I I Z X Z Z X I X Z I I Z X Z I | 1 | Y Y I X Z I I Z X Z Z X I X Z I I I I I |
| -1 | Z Y X Y Z Z X I Y Y I X Z I I I I I | -1 | I I I Z Y X Y Z Z X I Y Y I X Z I I I Z X |
| -1 | I I I Z X I X Z I Z X I Y X Y Z Z X | 1 | I I I I I I Z X I X Z I Z X I Y X X Y Z I |
| 1 | X I X I X Z I I I I Z X I X I X I X | 1 | I I I I Z X I X Z I I I I Z X I Y X X Y Z |
| 1 | Z Y Y Z I I I I I I I Z Y Y I X Z | 1 | Z Y Y I Y Y Z I I I I I I I Z X I X I X |
| 1 | X Z I I I I I I I I I I I I Z X Z | -1 | Y X Y Z I I I I I I I I I I I I Z Y Y Z |

| | $N = 19, M = 8$ | | $N = 20, M = 8$ |
|-------------|-----------------------------------------|-------------|-----------------------------------------|
| λ_i | O_i | λ_i | O_i |
| -1 | I I I I I I I Z Y X Y Z Z Y Y Z I I I | -1 | I I I I I I I I Z Y X Y Z Z Y Y I X Z |
| 1 | I I I Z Y Y I X I Y Y Z I I I I I I I | 1 | Z X I X I Y Y I X I Y Y Z I I I I I I I |
| 1 | I I I I I I Z X Z Z X I X Z I I Z X Z I | 1 | I I Z X Z I I Z X Z Z X I X Z I I I I I |
| -1 | I Z Y X Y Z Z X I Y Y I X Z I I I I I | -1 | I I I Z Y X Y Z Z X I Y Y I X Z I I I I |
| -1 | X Z I I Z X I X Z I Z X I Y X Y Z Z X | 1 | I I I I I I Z X I X Z I Z X I Y X X Y Z |
| 1 | Z X I X I X Z I I I I Z X I X I X I X | 1 | Y Y Z I Z X I X Z I I I I Z X I Y X X Y |
| 1 | X I Y Y Z I I I I I I I Z Y Y I X Z | 1 | Z Y Y I Y Y Z I I I I I I I Z X Z I I |
| 1 | Z X Z I I I I I I I I I I I I Z X Z | -1 | Y X Y Z I I I I I I I I I I I I Z Y Y |

Supplementary Figure 5. Known minimal benchmark IDs for qubit numbers $3 \leq N \leq 33$. We present all IDs in Supplementary Figures 1–5, in ascending order of N in the left column, and descending in the right column. Left: $N = 18, 19$. Right: $N = 20, 21$.

